Szilassi Lajos

Nyúl a kalapból...

Gondolatok a matematikai kommunikációról

Tanító- és Óvóképző Intézet

matematikai kommunikáció, poliéder, dualitás, programozás

Harminc évvel ezelőtt e sorok írójának megjelent egy cikke a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola tudományos közleményeit tartalmazó kötetben.[7] Az írás a matematikai cikkek, értekezések szokásos (elvárt) stílusát követve egy kutatási eredményt közölt, melyet most kissé lerövidítve ismét közreadunk.

Van olyan hét darab egyszerű hatszögből álló tórusszerű poliéder (toroid), melynek bármely két lapja szomszédos, azaz bármely két lapjának van közös éle.

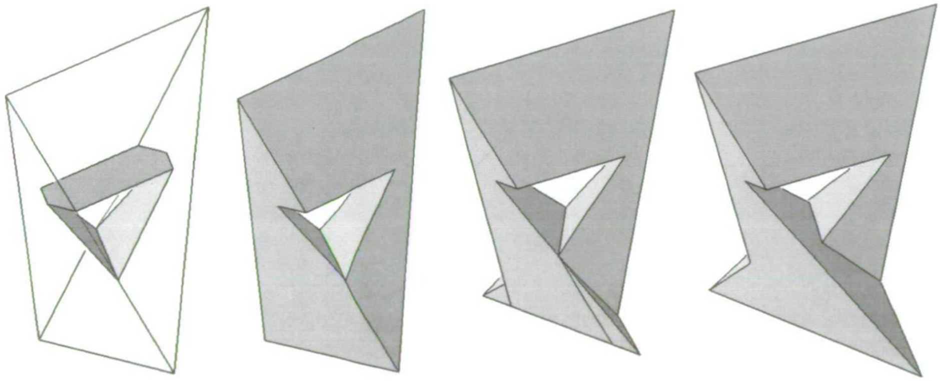
Állításunkat konstruktív úton igazoljuk.

Tekintsünk egy olyan tetraédert, amelynek van egy szimmetriatengelye. Legyen ez a koordináta-rendszer z tengelye. A konstrukció során végig meg fogjuk tartani ezt a z tengelyre vonatkozó szimmetriát.

Fúrjuk át a tetraédert egy olyan háromélű prizmával, melynek az élei párhuzamosak az *(xy)* síkkal, egyik éle metszi a tetraéder két szemközti élét, a másik két éle pedig egy-egy belső pontban metszi a tetraéder két szomszédos lapját. Így egy olyan toroidot kapunk, amelynek 2 négyszöglapja és 5 hatszöglapja van. Mivel a tetraéder lapjai közül bármely kettő szomszédos volt egymással, és minden tetraéderélből megmaradt egy-egy szakasz, ezért ezek a lapok továbbra is szomszédosak. Ugyanígy a prizma lapjai is páronként szomszédosak egymással, mert a kapott toroidnak vannak a prizma éleiből keletkezett élei. A konstrukcióból adódóan a prizma *(xy)* síkkal párhuzamos lapja is szomszédossá vált minden tetraéderlappal.

A prizmából keletkező két négyszöglap még nem szomszédos a kiindulásul vett tetraéder két-két lapjával. Ezért egészítsük ki a konstrukciót két olyan tetraéderrel, melynek lapsíkjai e négyszögek síkjaival, ill. az eredeti tetraéder három-három lapsíkjával esnek egybe. Az így kapott poliédernek már bármely két lapja szomszédos, csak van két olyan hatszöglapja, amely nem egyszerű sokszög: az egyik csúcsa illeszkedik a vele szemközti élre.

Szüntessük meg ezt a nem kívánt illeszkedést azzal, hogy elmozdítjuk a tetraédert átfúró prizma egyik élét (azt, amely az eredeti tetraéder két élét metszette) úgy, hogy közelebb kerüljön a prizma szemközti lapjához. Ezzel a keresett közönséges poliéderhez jutunk.



A matematikai irodalomban szinte kizárólag ehhez hasonló stílusú, sőt a legtöbbször ennél is tömörebben fogalmazott nagyon szép, nagyon elegáns bizonyításokat tartalmazó dolgozatokkal találkozhatunk, ahol a szép bizonyítás úgy került elénk, mint ahogy a bűvész a nagyérdemű publikum legnagyobb ámulatára elővarázsolja a nyulat az üres cilinderből.

E cikkek teli vannak az ilyen szófordulatokkal: *„Induljunk ki abból, hogy ..."*; *„Tekintsük a következő ..."*; *„Vegyük észre, hogy..."*. A „Miért abból induljunk ki?" kérdésre csak az lehet a válasz, hogy majd a végén kiderül, hogy ez volt a célszerű. Ugyanígy többnyire olyasmit kellene észrevenni, amit nincs földi halandó, aki „csak úgy magától" észrevenne.

Emiatt e sorok írójának éppen ez a varázslat nem nagyon (sőt: nagyon nem) tetszik, ugyanis nem nyújt semmiféle támpontot arra vonatkozóan, hogy miként lehet egy-egy ilyen szép eredményre rájönni. Gaussról alakították ki még a kortársai azt a véleményt – amit az utókor sem cáfolt –, hogy úgy tett, mint a róka, amint a farkával elsöpri maga után a nyomot, hogy nehezebb legyen az útját követni. Ez a szemléletmód mind a mai napig érezteti a hatását, nem csak a matematikai tárgyú értekezések megfogalmazásaiban, hanem – talán nem is ritkán – a felsőbb matematika oktatásában is.

Ezért engedjék meg, hogy a tudományos értekezésekben szokásos (elvárt) stílustól eltérő formát választva a továbbiakban a többes szám első személy helyett közvetlenebb hangnemre térjek át.

Az a meggyőződésem, hogy nem elegendő bemutatni a „szép" eredményeket, sokkal több tanulsággal járna, ha egy-egy cikk szerzője olykor azt is közölné, hogy hogyan vetődött fel a szóban forgó probléma, miként jutott el a megoldásáig. Esetleg megosztaná olvasóival azokat a gondjait, tévedéseit, olykor kudarcait is, amelyekből kollégái alkalmasint többet hasznosíthatnának saját munkájukban, mint az igazán szép „tiszta" eredményeket közlő írásokból, könnyebben elkerülhetnék azokat a csapdákat, amelyekbe a szerző belebotlott.

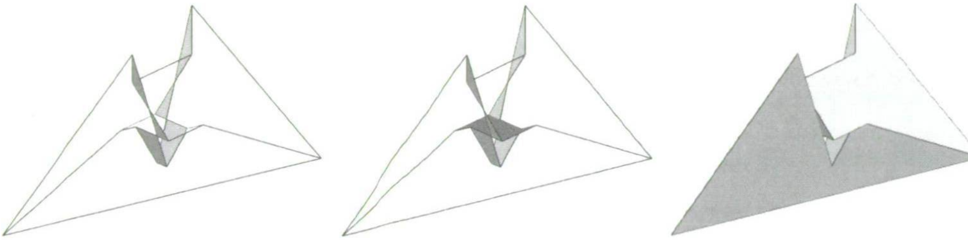
Nos, nézzük milyen előzményekre volt szükség a fenti eredmény eléréséhez.

- Kellett egy színvonalas matematika verseny[1], amelyen azt a feladatot tűzték ki, hogy „Igazoljuk, hogy egyetlen olyan poliéder létezik, amelynek nincs átlója és ez a tetraéder."
- Kellett egy, a feladatot továbbgondoló, kreatív matematikus: Császár Ákos (akadémikus, a feladat kitűzése idején – 1949-ben – az ELTE tanársegédje), aki észrevette, hogy a feladat csak a konvex poliéderekre igazolható, a tórusszerű poliéderekre nem, sőt a konvex megszorítás nélkül *nem is igaz* az állítás. Ennek bizonyítékául megkonstruálta az ún. Császár-poliédert, amelynek hét csúcsa van, és ugyancsak nincs átlója. ([2])
- Kellett egy kiváló tanáregyéniség, Dr. Csákány Béla, a Szegedi Egyetem algebra professzora, akinek a számára a matematikaoktatás nem definíciók, tételek és bizonyítások egymást követő – nyúl a kalapból jellegű - láncolata, hanem egy csodálatosan szerteágazó sokszínű világ feltárása. Célja az volt, hogy tanítványai érezzék az önálló felfedezés örömét, minél színesebb területeket ismerjenek meg ebből a csodálatos világból, össze tudják kapcsolni az egymástól látszólag távoli, azonban mégis egymáshoz kapcsolódó matematikai összefüggéseket. Csákány Béla mutatta egyetemista koromban (1963 táján) a Császár-poliéder egy modelljét, amely rendkívül érdekes geometriai konstrukció. Ugyancsak tőle hallottunk a matematikusokat mind a mai napig foglalkoztató térkép-színezési problémákról, Heawood tételéről, miszerint bármely tóruszra rajzolt térkép kiszínezéséhez *elegendő* hét szín. Heawood azt is megmutatta, hogy *szükséges* is a hét szín: rajzolt a tóruszra olyan térképet, amelynek hét olyan tartománya van, melyek közül bármely kettőnek van közös határvonala. Ezt a Heawood-féle térképet is láthattuk egy modellen.
- Kellett, hogy magam is *tanítsam* a matematikát, ugyancsak törekedve arra, hogy minél teljesebb képet alakítsak ki tanítványaimban egy-egy témáról. Miközben a poliéderek közötti duális kapcsolatot tanítottam – ilyen kapcsolat van pl. a kocka és az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder között –, a mondandóm árnyaltabbá tétele érdekében vetettem fel, hogy miként lehetne előállítani egyéb, nem szabályos poliéderek duálisait. Megmutattam például, hogy van egy projektív térgeometriai transzformáció, a gömbre vonatkozó polaritás, amely ponthoz síkot, síkhoz pontot, egyeneshez egyenest rendel illeszkedéstartó módon. Ez a hozzárendelés, amennyiben egy poliéder konvex, és a polaritás alapgömbjének a középpontja a poliédertest egy belső pontja, biztosan konvex poliédert rendel hozzá duálisként a vizsgált poliéderhez. De mi történik akkor, ha ezek a feltételek nem állnak fenn?
- Kellett egy ötlet: *Mi lenne, ha a Császár-poliédert alávetnénk egy ilyen térbeli polaritásnak?* A Császár-poliédernek az a tulajdonsága, hogy *bármely két **csúcsa** szomszédos*, abba menne át, hogy a duális alakzat *bármely két **lapja** szomszédos*, azaz bármely két lapjának van közös éle. Ez azt jelenthetné, hogy a Heawood-féle hétszínű térkép előállítható hét síklapból álló poliéder formájában. Ha a polaritás alap-

[1] Az 1949. évi, akkor második alkalommal megrendezett Kürschák-verseny. Kürschák József (1864–1933) a Budapesti Műszaki Egyetem professzora

gömbje az origó középpontú egységsugarú gömb, akkor a tér egy $P(a,b,c)$ koordinátákkal megadott pontjának az $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c{\cdot}z=1$ egyenletű sík lesz a megfelelője. Így ahhoz, hogy megkapjuk a duális poliéder csúcsait, elegendő megoldanunk 14 darab háromismeretlenes lineáris egyenletrendszert. Azért ennyit, mert a Császár-poliédert ennyi háromszöglap alkotja. A csúcsok ismeretében pedig már könnyű kiszámolni egy-egy lap éleinek és átlóinak a hosszát, amely a „fogalmam sincs, milyen lehet" poliéder lapjainak a megszerkesztéshez szükséges.

- Kellett (volna) ehhez elég sokat számolni, amihez viszont kellő pontosságra és kitartásra lett volna szükség. Ez viszont nekem nem volt. Volt viszont Szegeden akkortájt (1975-ben) egy (sőt: *a*) számítógép, amely MINSZK–27 névre hallgatott, elfoglalt egy jó nagy termet, egy másikat pedig az az apparátus, amely a hűtéséről gondoskodott. Egy barátomat megkértem, hogy számoltassa ki vele az általam kért adatokat. A magamfajta, számítógéphez egyáltalán nem értő „gyalogos" matematikatanár számára misztikus nimbusz vette körül a számítógépet, a programozójával együtt, aki meg tudta fogalmazni a gép nyelvén az én problémámat. (Egy jó hosszú lyukszalag kellett a programnak, egy másik az adatoknak. Az eredményt is egy lyukszalag tartalmazta, amit viszont megértett egy nyomtató). Felcsigázva vittem haza a kinyomtatott numerikus adatokat (abban az időben még álmodni sem lehetett arról, hogy rajzoljon egy számítógép), amelyből rendre megszerkesztettem az új poliéder lapjait. A lapok között akadt azonban önátmetsző is. Arra nem gondoltam, hogy egy egyszerű, de alkalmasint konkáv testszögletnek esetleg önátmetsző sokszög lehet a duálisa.



- Kellett némi remény, hogy a Császár-poliéder csúcsai helyett más pontokat, de ugyanazokat a kombinatorikus kapcsolatokat véve alapul, sikerül önátmetszés nélküli lapokat (egyszerű hatszögeket) kapni. Ez azonban a drága gépidővel, nehézkesen működő MINSZK–27-tel nem tűnt megvalósíthatónak.
- Kellett egy forradalommal felérő szemléletváltás a számítástechnikában, amely az asztali számítógépek elterjedésének az irányába hatott. 1976 októberében kapott a Szegedi Tanárképző Főiskola egy WANG 2200/C típusú, 16 KB memóriájú, BASIC interpreterrel[2] működő számítógépet. Azon csodálkoztunk, hogy van olyan számítógép, amely elfér egy asztalon. Maga a bőröndnyi gép tranzisztorokkal működött. Az adatokat és a programokat speciális magnókazettán tárolta. Az eredményeket az alfanumerikus[3] képernyőn, vagy nyomtatón kaptuk meg.
- Kellett némi szívósság, mások szerint megszállottság ahhoz, hogy autodidakta úton, szinte dokumentáció és programozói előképzettség nélkül meg tudjam tanulni ezt a programnyelvet. Sikerült. Két hónap elteltével rekonstruálni tudtam a korábban kapott eredményeket, egy újabb hónap elteltével be tudtam építeni a programba egy olyan szűrőt, amely az aktuális adatok futtatása mellett jelezte, hogy az így kapott hatszögek önátmetszők, vagy sem. Lehet, hogy a mai programozó jelöltek számára is jó iskolának számítana, ha a programozás legfontosabb szempontja a rövid és hatékony program készítése lenne. Erre, vagyis erős kreativitásra kényszerítették az akkori programozókat a lassú és kevés memóriájú gépek. Néhány hetes kísérletezés után egy adathalmazra azt „mondta" a számítógép, hogy mind a hét lap egyszerű sokszög. Ismét szerkesztgetés, modellkészítés következett, amely azonban továbbra sem volt eredményes. Ugyanis, bár minden lap egyszerű sokszög volt, voltak olyan lapok, amelyek a közös határvonalukon túl is met-

2 Az interpreter azt jelenti, hogy nem készült a processzor számára érthető „fordítás" a futó programról, hanem a program minden egyes utasítását újból és újból meg kellett értenie, majd végrehajtania, valahányszor erre az utasításra ugrott a program. Ez rendkívül lassúvá tette a működést.

3 Az alfanumerikus képernyő csak számokat és betűket tudott megjeleníteni, rajzot nem.

szették egymást. Egy újabb „szűrő" elkészítésére volt szükség, amely ezeket a nem kívánt metszésvonalakat felderítette.

- Kellett jókora – mai szemmel is hihetetlennek tűnő – szerencse. Alig készült el ez az újabb szűrő, néhány hetes kísérletezés – mondhatnám azt is, hogy sötétben tapogatózás – után (1977. március 8-án) ismét azt mondta a gép, hogy a most kapott poliéder minden szempontból megfelelő. Ezúttal igaza volt. Kezemben volt egy eléggé csúnyácska poliéder modellje, amelynek viszont minden lapja egyszerű sokszög, és bármely két lapjának van közös éle. Pl. a legrövidebb élhossz mindössze 7 mm, a leghosszabb 36 cm volt. A kézbe vehető modell alapján már lehetett úgy változtatni az adatokat, hogy a kapott poliéder esztétikusabb látványt nyújtson. Sőt tudtam elemi geometriai, „nyúl a kalapból" jellegű bizonyítást is adni a poliéder létezésére. Ez volt a fenti.

Itt véget is érhetne a történelemóra, az ezt követő események legkevésbé rajtam múltak.

- Kellett egy, az információáramlás szempontjából (is) jól működő intézmény, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete. Így szerezhettem tudomást arról, hogy 1975-ben egy cikk jelent meg a Scientific American c. folyóiratban a Császár-poliéderről. A Scientific American abban az időben két példányban járt Szegedre. (Az egyiket Szőkefalvi Nagy Béla akadémikus, a másikat az MTA Biológiai Kutatóközpontja kapta rendszeresen.)
- Kellett a Scientific American, ez a nagy tekintélyű, világszerte ismert tudományos ismeretterjesztő folyóirat. Ennek a matematikai rovatát évtizedeken át Martin Gardner[4] vezette, akinek a fenti információ hatására el mertem küldeni a kapott poliéderről szóló eredményemet. Két héten belül kaptam tőle egy lelkes hangú levelet, amelyben arra kért, engedjem meg, hogy ezt az eredményt publikálja. Ő nevezte először a konstrukciót Szilassi-poliédernek. ([3])
- Kellett tehát a publicitás, amely a Scientific American cikkével kezdődött. Ennek akkor nem tulajdonítottam túl nagy jelentőséget, de utóbb kiderült, hogy minden további sikert ennek a néhány bekezdésnek köszönhet a konstrukció (és talán a felfedezője is). (Időrendben: [9], [4], [5], [6], .[W 1].)

Engedjék meg, hogy e sikerek közül – a szerénytelenség vádját vállalva – felsoroljak néhányat:

1998.: A New York-i Rockefeller Alapítvány kuratóriumának elnöke megajándékozott a poliéder tömör bronzból készült modelljével, amelyet a kuratórium a „kreativitás szimbóluma"-ként adott az arra érdemes kitüntetettjeinek.

2000.: Egy brüsszeli egyetem matematika tanszéke arra vállalkozott, hogy felsorolja a huszadik század – megítélésük szerint – leginkább említésre méltó matematikai eredményeit. A matematika 11 területéről mintegy 150 eredményt soroltak fel. Így kerülhettem egy „társaságba" olyan nevekkel, mint Hilbert, Russell, Kolmogorov, Einstein, Gödel, Turing, Conway[5], a magyarok közül Pólya György, Riesz Frigyes Neumann János, Erdős Pál. A szűkebb, 13 eredményt említő geometria és lineáris algebra kategóriában együtt olvasható a nevem Peano, Mandelbrot, Penrose nevével. Erre valóban büszke vagyok, noha mind a mai napig nem értem, miként kerülhettem erre a listára. ([W 2])|

2002.: Pierre Fermat, a nagy francia matematikus születésének 400-adik évfordulóján a ma matematikai múzeumként működő szülőházának az udvarán felavathattam a konstrukció rozsdamentes acélból készült, mintegy egyméternyi méretű modelljét.

2005.: Jürgen Bokowski, aki igazolta, hogy a Császár-poliédernek négy, egymástól ránézésre különböző[6] változata van, és több nincs ([1], p.: 235), az irányított matroidokról szóló könyvében egy önálló alfejezetet szánt a Szilassi-poliédernek. ([1], p.: 238–245.) Ebben igazolta, hogy ennek viszont nem létezik ránézésre különböző változata.

2006.: Részt vehettem Atlantában a Martin Gardner 92. születésnapja tiszteletére rendezett konferencián, ahol minderről alkalmam nyílt beszámolni nagyjából úgy, mint most 2007-ben itthon.

---

[4] Martin Gardner nem volt kutató matematikus, viszont rendkívül sokat tett a tudomány népszerűsítéséért.

[5] Conway-jel személyesen is beszélhettem Atlantában. Felhívta a figyelmemet a hétlapú poliéder egy általam nem ismert tulajdonságára.

[6] A „ránézésre különböző" jelző itt pontosan definiált fogalom, lényegében azt jelenti, hogy a két változat csúcsai alapvetően más elrendezésűek, miközben a kombinatorikus szerkezetük azonos.

A szóbeszéd szerint egy híres kutatóintézet első emeletén, ahol a fiatal tudósjelöltek, tanársegédek dolgoznak, nagy betűkkel ki van írva a folyosóra, hogy: *Nem elég ha tudsz tojni, tudni kell kotkodácsolni is.* Egy emelettel feljebb, ahol a szakma nagy öregjei, vezető kutatók tisztségviselők szobái vannak, ez az írás olvasható: *Nem elég, ha tudsz kotkodácsolni, tudni kell tojni is.* Mindezt legszívesebben megtoldanám még egy mondattal, amelyet azonban nincs hova felírni, mert ez a kívülállóknak szánt intelem: *Nem elég meghallani a kotkodácsolást, meg kell tudni különbözetni az indokolt hangokat az indokolatlan lármázástól.*

IRODALOM

[1] BOKOWSKI, J.: *Computational Oriented Matroids*, Cambridge University Press, Cambridge, (2005.)

[2] CSÁSZÁR, Á.: *A polyhedron without diagonals*, Acta Sci. Math. Universitatis Szegediensis (1949–50.), **13**:140–142.

[3] GARDNER, M.: *The Minimal Art*, Scientific American (1978) **11.**

[4] GARDNER, M.: *Fractal, Music, Hypercards and More ...*, W.H. Freeman and Company, New York, (1991.)

[5] GRÜNBAUM, B.: *Polytopes*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[6] KAPPRAFF, J.: *Connections: The Geometric Bridge between Art and Science*, World Sscientific, (2001.)

[7] SZILASSI L.: *Egy poliéder, amelynek bármely két lapja szomszédos*, A Juhász Gyula Tanárképző Főiskola tudományos közleményei, Szeged, (1977.) 131-139.

[8] SZILASSI, L.: *Regular Toroids*, Structural Topology Montreal, Canada (1986.), **13**: 69.- 80.

[9] STEWART, B. M.: *Adventures Among the Toroids*, Okemos, Michigan, Revised Second Edition, (1980.)

[W 1.] http://mathworld.wolfram.com/SzilassiPolyhedron.html

[W 2.] http://www.ulb.ac.be/soco/matsch/academique/siecle.htm

LAJOS SZILASSI

Rabbit from a hat... Thoughts on metamathematic communication

The author resents mathematical literature almost exclusively focuses on results, and does not show the way leading to the results, although this would methodologically help research. As an example, he presents a dry, factual, „rabbit out of a hat" kind of proof of a polyhedron, and then describes the circumstances of the polyhedron's discovery: the path which the mentioned polyhedron had to travel till its discovery.